Segunda Prova de Teoria Eletromagnética I, 18/10/2010

Nome: GABARITO

(1ª questão) *(4,0 pontos)*

Considere a expansão de multipolos para o potencial eletrostático $V(\vec{r})$ de uma distribuição localizada de cargas com densidade $\rho(\vec{r}')$ em um volume $\mathcal{V}$:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int_{\mathcal{V}}(r')^n P_n(\cos\theta')\rho(\vec{r}')d\tau',$$

onde θ' é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}'$, com o polinômio de Legendre $P_n(\cos\theta')$ sendo obtido através fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n.$$

(a) *(2,0 pontos)* Mostre que o termo de quadrupolo da expansão acima pode ser escrito como

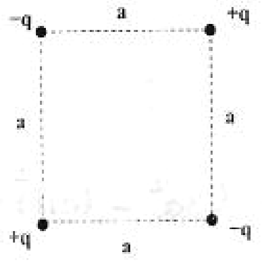
$$V_{\text{quad}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^3}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{r_i r_j}{r^2}Q_{ij},$$

onde r_i é a componente i do vetor $\vec{r}$ e Q_{ij} é o momento de quadrupolo

$$Q_{ij} = \int_{\mathcal{V}}\left[3r_i'r_j' - (r')^2\delta_{ij}\right]\rho(\vec{r}')d\tau',$$

com δ_{ij} denotando o delta de Kronecker e r_i' a componente i do vetor $\vec{r}'$.

(b) *(2,0 pontos)* Determine todas as componentes do momento de quadrupolo Q_{ij} de um quadrupolo elétrico de lado a, cargas individuais de módulo q e localizado no plano xy conforme figura abaixo:



a) $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{1}{r}\int_V \rho\, d\tau'}_{\text{Termo de monopolo}} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\int_V r' P_1(\cos\theta')\,\rho\, d\tau'}_{\text{Termo de dipolo}} + \underbrace{\frac{1}{r^3}\int_V (r')^2 P_2(\cos\theta')\,\rho\, d\tau'}_{\text{Termo de quadrupolo}} + \dots \right]$

$\Rightarrow V_{quad}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^3}\int_V (r')^2\left[3\cos^2\theta' - 1\right]\rho(\vec{r}')\,d\tau'$

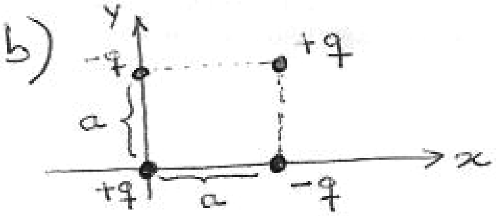
Mas $\cos^2\theta' = \left[\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{rr'}\right]^2 = \frac{(\sum_i r_i r_i')(\sum_j r_j r_j')}{(rr')^2} = \sum_{i,j=1}^{3}\frac{(r_i r_j)(r_i' r_j')}{(rr')^2}$

$\Rightarrow V_{quad}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^3}\int_V \left[3\frac{\sum_{i,j}(r_i r_j)(r_i' r_j')}{r^2} - (r')^2\right]\rho(\vec{r}')\,d\tau'$

Multiplicamos por $\sum_{i,j}\frac{r_i r_j}{r^2}\delta_{ij} = 1$

$\Rightarrow \boxed{V_{quad}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^3}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{r_i r_j}{r^2}Q_{ij}}$, com $\boxed{Q_{ij} = \int_V\left[3r_i' r_j' - (r')^2\delta_{ij}\right]\rho(\vec{r}')\,d\tau'}$

b)



Distribuição discreta: $Q_{ij} = \sum_{n=1}^{4}\left[3r_i' r_j' - (r')^2\delta_{ij}\right]\Big|_m q_m$

Tomado p/ a carga m.

- $Q_{xx} = (3a^2 - a^2\delta_{xx})(-q) + (3a^2 - (a\sqrt{2})^2\delta_{xx})q + (\cancel{3\cdot 0^2} - a^2\delta_{xx})(-q)$
  $= -2a^2q + a^2q + a^2q = 0$
- $Q_{yy} = (-\delta_{yy}a^2)(-q) + (3a^2 - (a\sqrt{2})^2\delta_{yy})q + (3a^2 - a^2\delta_{yy})(-q)$
  $= a^2q + a^2q - 2a^2q = 0$
- $Q_{zz} = (-a^2\delta_{zz})(-q) + (-(a\sqrt{2})^2\delta_{zz})q + (-a^2\delta_{zz})(-q) = 0$
- $Q_{xz} = Q_{zx} = Q_{yz} = Q_{zy} = 0$ (pois $r_z' = 0$ p/ todas as cargas E $\delta_{ij} = 0$ pois $i \neq j$)
- $Q_{xy} = (3a^2 - (a\sqrt{2})^2\cancelto{0}{\delta_{xy}})q = 3a^2q$
- $Q_{yx} = (3a^2 - (a\sqrt{2})\cancelto{0}{\delta_{yx}})q = 3a^2q$

(2ª questão) *(2,0 pontos)*

Considere uma distribuição de carga cujo potencial eletrostático, dado em coordenadas esféricas, depende exclusivamente da variável θ [ou seja, $V = V(\theta)$], onde θ é o ângulo formado entre o semieixo positivo Z e o vetor posição $\vec{r}$. Determine a solução geral da equação de Laplace para $V(\theta)$, identificando em particular as constantes a serem fixadas pelas condições de contorno.

Equação de Laplace em coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

Mas $V = V(\theta) \Rightarrow \dfrac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \dfrac{dV}{d\theta}\right) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta \dfrac{dV}{d\theta} = \underbrace{a}_{\text{constante}} \qquad \Rightarrow \dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta}$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dV}{d\theta}\, d\theta = \int \frac{a}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta \Rightarrow V = a\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

Assim: $V = a \displaystyle\int \frac{d\theta}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{a}{2}\int \frac{d\theta}{\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{a}{2}\int \frac{\sec^2\theta/2\; d\theta}{\tan\theta/2}$

Mudança de variáveis: $u = \tan\frac{\theta}{2}$; $du = \frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\, d\theta$

Logo: $V = a\displaystyle\int \frac{du}{u} = a\ln u + \underbrace{b}_{\text{constante}}$

Portanto: $\boxed{V(\theta) = a\ln\left|\tan(\theta/2)\right| + b}$, com a e b sendo as constantes a serem fixadas pelas condições de contorno.

Obs: $\ln\left|(\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cotg}\theta)^{-1}\right| = \ln\left|\dfrac{1}{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}\right| = \ln\left|\dfrac{1}{\frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}\right| = \ln\left|\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right| = \ln\left|\dfrac{2\operatorname{sen}\theta/2\cos\theta/2}{1+\cos^2\frac{\theta}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\right|$

$= \ln\left|\dfrac{\cancel{2}\operatorname{sen}\theta/2\,\cancel{\cos\theta/2}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\theta/2}\right| = \ln\left|\dfrac{\operatorname{sen}\theta/2}{\cos\theta/2}\right| = \ln\left|\tan\theta/2\right|$

(3ª questão) *(4,0 pontos)*

Um cilindro de raio R muito longo feito de material dielétrico linear e homogêneo de susceptibilidade χ_e é colocado em um campo inicialmente uniforme $\vec{E}_0$. O eixo do cilindro é perpendicular a $\vec{E}_0$.

(a) *(1,0 ponto)* Escreva as condições de contorno a serem obedecidas pelo potencial na superfície do cilindro e para distâncias muito maiores que o raio do cilindro (condição de contorno no infinito).

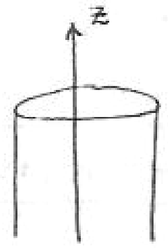
(b) *(2,0 pontos)* Encontre o campo elétrico resultante dentro do cilindro.

(c) *(1,0 ponto)* Mostre, a partir da expressão obtida no item *(b)*, que o campo dentro do cilindro produz os resutlados esperados nos limites de χ_e para um material condutor e para o caso em que removemos o dielétrico do espaço.

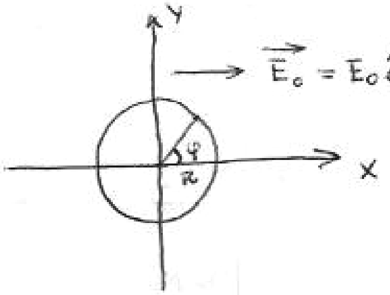
Dado útil: A solução geral da equação de Laplace, assumindo-se simetria cilíndrica, é

$$V(s,\phi) = a_0 + b_0 \ln s + \sum_{k=1}^{\infty}\left[s^k\left(a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi\right) + s^{-k}\left(c_k \cos k\phi + d_k \sin k\phi\right)\right].$$

Cilindro:



Vista frontal $\longmapsto$



Material dielétrico linear e homogêneo: $\rho_b \propto \rho_F = 0$. Logo, o problema é resolver $\nabla^2 V = 0$ para analisarmos como o campo $\vec{E}_0$ é deformado por uma densidade superficial cilíndrica de carga ligada σ_b.

a) Condições de contorno:

(i) $\boxed{V_{DENTRO}(R,\varphi) = V_{FORA}(R,\varphi) \quad \text{(continuidade do potencial)}}$

(ii) $\left(\varepsilon_0 \dfrac{\partial V_{FORA}}{\partial s} - \varepsilon \dfrac{\partial V_{DENTRO}}{\partial s}\right)\Bigg|_{s=R} = -\cancelto{0}{\sigma_F}$, com $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e)$

$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_0 \dfrac{\partial V_{FORA}}{\partial s}\Bigg|_{s=R} = \varepsilon \dfrac{\partial V_{DENTRO}}{\partial s}\Bigg|_{s=R} \quad \text{(descontinuidade do campo)}}$

(iii) $V_{FORA}(s,\varphi) \longrightarrow V_0$ quando $s \gg a$, onde

$$V_0 = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = -E_0 x = -E_0 s\cos\varphi$$

Logo: $\boxed{V_{FORA}(s,\varphi) \longmapsto -E_0 s\cos\varphi \quad (s \gg a)}$

b) Impondo que $V_{DENTRO}(s,\varphi)$ seja bem comportado na origem temos:

$$V_{DENTRO}(s,\varphi) = \cancelto{0}{g_0} + \sum_{k=1}^{\infty} s^k (a_k \cos k\varphi + b_k \operatorname{sen} k\varphi)$$

Tomando $V=0$ q^do $s=0$

Impondo a condição de contorno (iii):

$$V_{FORA}(s,\varphi) = -E_0 s \cos\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} s^{-k} (c_k \cos k\varphi + d_k \operatorname{sen} k\varphi)$$

Usando agora a condição (i):

$$\left.\sum_{k=1}^{\infty} s^k (a_k \cos k\varphi + b_k \operatorname{sen} k\varphi)\right|_{s=R} = \left.\left(-E_0 s \cos\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} s^{-k} (c_k \cos k\varphi + d_k \operatorname{sen} k\varphi)\right)\right|_{s=R}$$

$\Rightarrow$
$\underline{k=1}$: $R a_1 = -E_0 R + \frac{1}{R} c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = R^2 (a_1 + E_0)}$

$\underline{k \neq 1}$: $R^k a_k = R^{-k} c_k \Rightarrow \boxed{c_k = R^{2k} a_k}$ $(k \neq 1)$

$\underline{\forall k}$: $R^k b_k = R^{-k} d_k \Rightarrow \boxed{d_k = R^{2k} b_k}$

Condição (ii):

$$\varepsilon_0 \left[-E_0 \cos\varphi - \sum_{k=1}^{\infty} k R^{-k-1} (c_k \cos k\varphi + d_k \operatorname{sen} k\varphi) \right] = \varepsilon \left[\sum_{k=1}^{\infty} k R^{k-1} (a_k \cos k\varphi + b_k \operatorname{sen} k\varphi) \right]$$

$\Rightarrow$
$\underline{k=1}$: $-E_0 - R^{-2} c_1 = \varepsilon_r a_1 \Rightarrow \varepsilon_r a_1 = -E_0 - \cancel{R^{-2}}(\cancel{R^2}(a_1+E_0)) = -a_1 - 2E_0 \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{-2E_0}{\varepsilon_r + 1}}$

$\underline{k \neq 1}$: $-R^{-k-1} c_k = \varepsilon_r R^{k-1} a_k \Rightarrow \varepsilon_r a_k = -R^{-2k} c_k \Rightarrow c_k = -\varepsilon_r R^{2k} a_k \Rightarrow \boxed{c_k = a_k = 0 \ (k \neq 1)}$

$\underline{\forall k}$: $-R^{-k-1} d_k = \varepsilon_r R^{k-1} b_k \Rightarrow d_k = -\varepsilon_r R^{2k} b_k \Rightarrow \boxed{b_k = d_k = 0 \ \forall k}$

$\rightarrow$ Até aqui 1,5

Assim $V_{Dentro} = \dfrac{-E_0}{1+\chi_e/2} s \cos\varphi = \dfrac{-E_0}{1+\frac{\chi_e}{2}} x \Rightarrow \vec{E}_{DENTRO} = -\vec{\nabla} V_{DENTRO} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{DENTRO} = \dfrac{\vec{E}_0}{1+\frac{\chi_e}{2}}}$

(campo constante!)

$\rightarrow$ Até aqui 2,0

(c) Condutor: $\chi_e \to \infty \Rightarrow \vec{E}_{DENTRO} = 0$ (ok! campo nulo no interior do condutor!)

Remoção do dielétrico: $\chi_e = 0 \Rightarrow \vec{E}_{DENTRO} = \vec{E}_0$ (ok! Campo permanece uniforme sem o dielétrico!)